Colegio Antil Mawida
Departamento de Matemática
Profesora:Natalia Roldán Rosero

MANUAL DE ESTUDIO 4°Medio
Refuerzo Contenido y Aprendizaje

NOMBRE COMPLETO:			
FECHA:			**NOTA**
CURSO	**PUNTAJE IDEAL**	**PUNTAJE OBTENIDO**	
4°			

Conocimientos previos:
Se llama **función de A en B** a una relación **f de A en B** que cumple las siguientes propiedades.

$$domf = A \wedge ((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f) \Rightarrow y_1 = y_2$$

● Si f es una función de A en B se denota por: $\boxed{f : A \longrightarrow B}$

● El conjunto A se llama dominio de la función y B recorrido de la función. Así mismo, si las coordenadas $(x, y) \in f$, diremos que: $\boxed{f(x) = y}$

● Si $(x, y) \in f \Rightarrow f(x) = y$ de modo que:

- y se llama imagen de x .
- x se llama preimagen de y.

En una función **f de A en B**, cada elemento de A tiene una y solo una imagen en B. Por comprensión, lo anterior se escribe:

$$\boxed{\forall x \in A, \exists! y \in B / f(x) = y}$$

En síntesis:

El **dominio** de una función es el conjunto de valores para los cuales está definida la función, se escribe $Dom\, f$. El **recorrido** es el conjunto de las imágenes, esto es, el conjunto formado por los valores que toma y , se escribe $\mathrm{Rec}\, f$.

Ejemplo: determina el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 5$, como $f(x)$ es un polinomio no tiene puntos en el dominio donde esta se indetermine.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, si x es cero el denominador de la fracción es cero, de modo tal que,

$f(0) = \frac{1}{0}$, que es una expresión indeterminada, así el dominio de la función es $domf = \Re - \{0\}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$, para que $\sqrt{x}$ sea un número real, al valor de x debe ser positivo o cero, luego $domf = \Re^+$

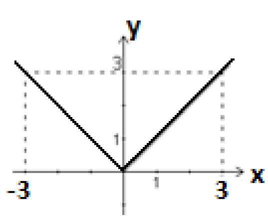
d) $f(x) = \frac{2}{3-x} + \frac{5}{2x+1}$, ninguno de los denominadores puede ser cero. Como para 3 y $-\frac{1}{2}$ los denominadores de las fracciones son cero, decimos que el dominio de la función viene dado por

$$domf = \Re - \left\{3, -\frac{1}{2}\right\}$$

Algunas funciones importantes.

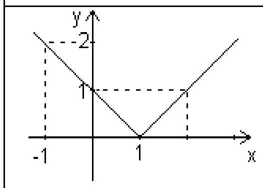
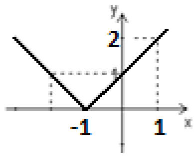
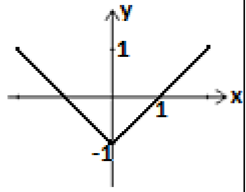
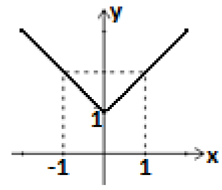
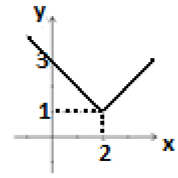
Función valor absoluto:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$



El valor absoluto de un número es la distancia
Entre este número y el cero en la recta numérica.

Desplazamientos:

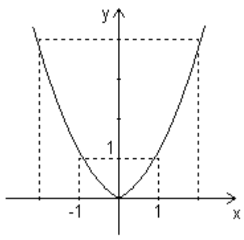
$f(x)=\|x-1\|$	$f(x)=\|x+1\|$	$f(x)=\|x\|-1$	$f(x)=\|x\|+1$	$f(x)=\|x-2\|+1$
				

<u>Función cuadrática</u>

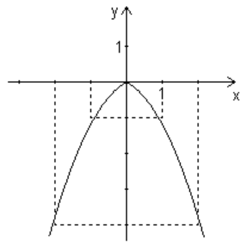
$f(x)=ax^2+bx+c, \quad a,b,c\in IR, a\neq 0$, La representación gráfica de esta función es una **parábola** simétrica con respecto a la recta paralela al eje y de ecuación: $x=-\dfrac{b}{2a}$

Si $a>0$, la **concavida**d de la parábola está orientada hacia arriba,
si $a<0$ la concavidad está orientada hacia abajo.

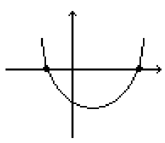
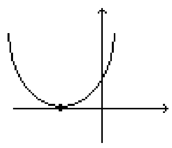
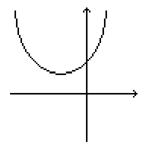
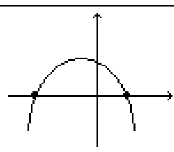
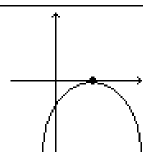
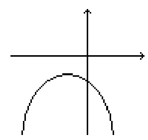
$f(x)=x^2$



$f(x)=-x^2$

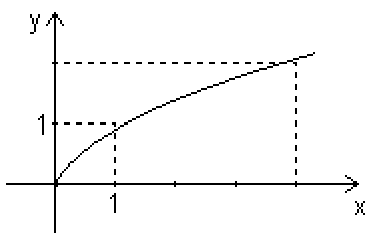


Ceros de la función: Los ceros de la función son los valores de x para los cuales $f(x)=0$.
La expresión $\Delta=b^2-4ac$ se denomina **discriminante**.

	Si $\Delta>0$, la función tiene 2 ceros	Si $\Delta=0$, la función tiene 1 cero	Si $\Delta<0$, la función no tiene ceros en el conjunto de los números reales
$a>0$			
$a<0$			

<u>Función raíz cuadrada</u>

$f(x)=\sqrt{x}, \quad x\geq 0$



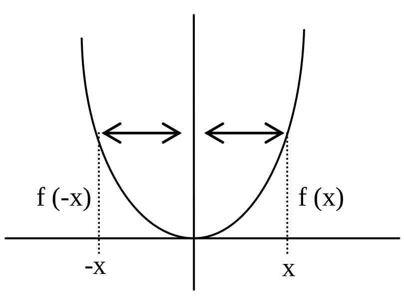
<u>Función par e impar.</u>

***1)* FUNCIÓN PAR:**

Si una función f satisface que $f(x)=f(-x)$ para todo x en su dominio, entonces f es una **función par.**

Ejemplo: Comprobar que f(x) = x^2 es par.
f (-x) = $(-x)^2$ = x^2 = f(x)
Como f (-x) = f(x), entonces la función es par!

La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y



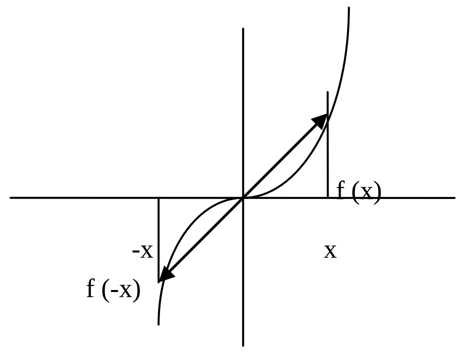
2) ***FUNCIÓN IMPAR***:

Si una función f satisface que $f(-x) = -f(x)$ para todo x en su dominio, entonces f es una **función impar.**

Ejemplo: Demostrar que f(x) = x^3 es una función impar.

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

Como f(-x) = - f(x), entonces la función es impar!

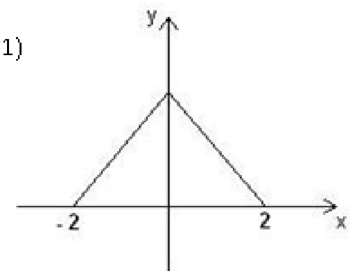


La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen

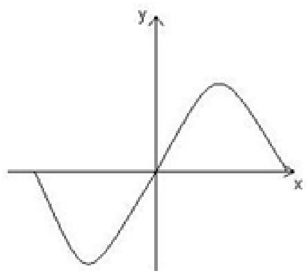
Ejemplos.

a) Clasifica las siguientes funciones en par, impar o sin paridad.

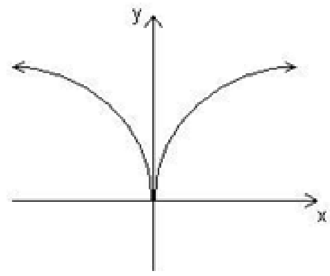
1)



2)



3)



Función par, pues es Simétrica con respecto al eje y

Función impar, pues es simétrica respecto al origen.

Función par, pues es Simétrica con respecto al eje y

b) Diga si cada función es par, impar o ninguno de estos tipos, sin trazar la gráfica.

(1) $f(x) = 4x^3$

Reemplazamos en la función (1) el valor de (-x), de modo que la función queda como:

$$f(-x) = 4(-x)^3 = -4x^3 = -f(x).$$

Como $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ es impar.

(2) $f(x) = 2x^4 - x^2$

Reemplazamos en la función (2) el valor de (-x), de modo que la función queda como:

$$f(-x) = 2(-x)^4 - (-x)^2 = 2x^4 - x^2 = f(x)$$

Como $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ es par.

(3) $f(x) = 3x^3 + 2$

Reemplazamos en (3) el valor de (-x), de modo que la función queda como:

$$f(-x) = 3(-x)^3 + 2 = -3x^3 + 2 \neq f(x) \wedge -f(x)$$

No se aplica el criterio.

Tipos de funciones.

a) función inyectiva.

Una función f se llama inyectiva o uno a uno si y solo si:

$$\forall x_1, x_2 \in domf, (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

Ejemplo 1: Demostremos que $f : \Re - \{1\}, definida\ \ f(x) = \dfrac{x}{x-1}\ es$ inyectiva.

Demostración: $\forall x_1, x_2 \in \Re - \{1\}$, si $f(x_1) = f(x_2), entonces\ \dfrac{x_1}{x_1 - 1} = \dfrac{x_2}{x_2 - 1}$

Realizando el producto cruzado se obtiene:

$$\boxed{x_1(x_2 - 1) = x_2(x_1 - 1) \Rightarrow x_1x_2 - x_1 = x_2x_1 - x_2 \Rightarrow x_1 = x_2}$$

Hemos demostrado que: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ por lo tanto f **es inyectiva.**

Ejemplo 2: Si $A = \{-2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, -3, 4\}$. Si las siguientes tablas describen Funciones $A \to B$

x	-2	3	4	5
y	1	2	4	-3

Solución: si observamos la tabla, observamos que cada elemento del dominio A tiene una única imagen en B.

b) Función epiyectiva (sobreyectiva)

Una función f de A en B ($f : A \to B$) se llama epiyectiva o sobreyectiva si y solo si $\boxed{recf = B}$
Es decir, en toda función epiyectiva el recorrido coincide con el codominio. Escrito por comprensión, tenemos que:

$$\boxed{\forall y \in B, \exists x \in A / f(x) = y}$$

Ejemplo 1: demostremos que $f : \Re \to \Re, definifa$ por $f(x) = 6x - 3$ es epiyectiva.

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall y \in \Re, si : y = 6x - 3 \\ despejemos : 6x = y + 3 \\ luego : \exists x = \dfrac{y+3}{6} / f(x) = y \end{array}}$$

c) Función biyectiva:

Una función f de A en B ($f : A \to B$) se llama **biyectiva** si y solo si **f es inyectiva y epiyectiva a la vez.**

c) Función inversa:

Una función f de A en B ($f : A \to B$) tiene su correspondiente función inversa $(f^{-1} : B \to A)$ si y solo si $(f : A \to B)$ **es biyectiva**. Además, en toda función $(f : A \to B)$ que tiene su correspondiente función inversa, $f^{-1} : B \to A$ se cumple que:

$$\boxed{domf = A = rec(f^{-1}) \wedge recf = B = domf^{-1}}$$